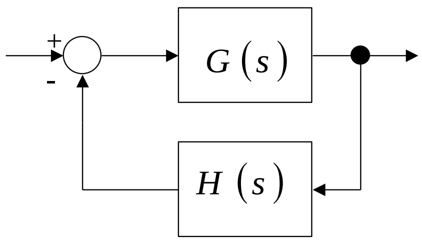
Capítulo 12: Estabilidad en el dominio de la frecuencia

carlos.platero@upm.es (C-305)

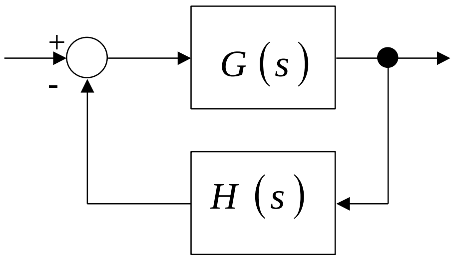
Estabilidad relativa

- Estabilidad
  - Absoluta: FDT del conjunto total. Tabla de Routh.
  - Relativa: Mide la estabilidad. Válida para estructuras de realimentación.
- Criterio de Nyquist
  - Este criterio indica el número de polos de la cadena cerrada en el dominio complejo positivo de una estructura de realimentación negativa. Emplea como dato de partida la respuesta en frecuencia de la cadena abierta.
  - Su fundamento está basado en el principio del argumento de la teoría de la variable compleja.



Criterio de Nyquist (1/4)

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}\frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$



$$\boxed{F(s) = \frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}}$$

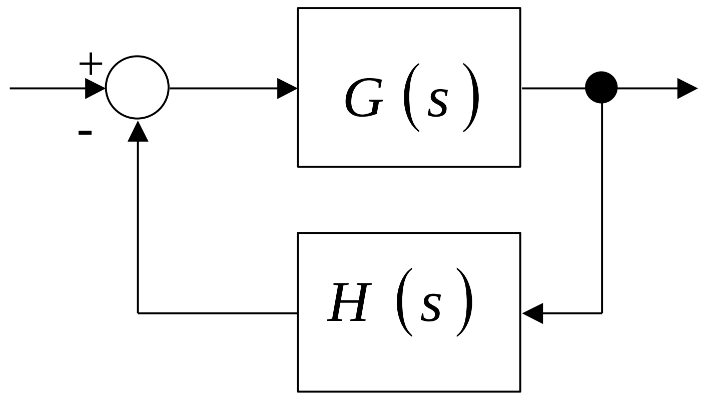
- Los polos de *F(s)* coincidirán con los polos de la cadena abierta. Los ceros de *F(s)*, sin determinar, serán las raíces del polinomio característico o también denominados los polos de la cadena cerrada. Estos últimos son los que definen la estabilidad del sistema.
- Tómese una curva cerrada $\Gamma(s)$ sobre el dominio complejo y que abarque a todo el dominio complejo positivo.
- El principio del argumento establece que el número de ceros de *F(s)*, polos del sistema realimentado, contenidos dentro de la curva cerrada $\Gamma(s)$ vendrá dado por:

$$\boxed{Z = N + P}$$

Criterio de Nyquist (2/4)

$$F(s) = \frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

$$Z = N + P$$

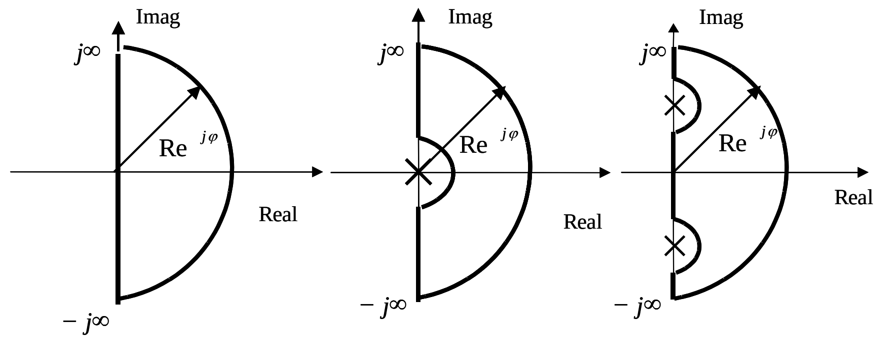


- donde *Z* es el número de ceros de *F(s)* en el dominio complejo positivo, *N* es el número de vueltas que recorre la imagen de la curva, $\Gamma^*(s)=F(\Gamma(s))$, al desplazar *F(s)* por la curva $\Gamma(s)$ y *P* es el número de polos de *F(s)* encerrados por la curva $\Gamma(s)$. Obviamente, para que el sistema sea estable *Z* debe ser cero.

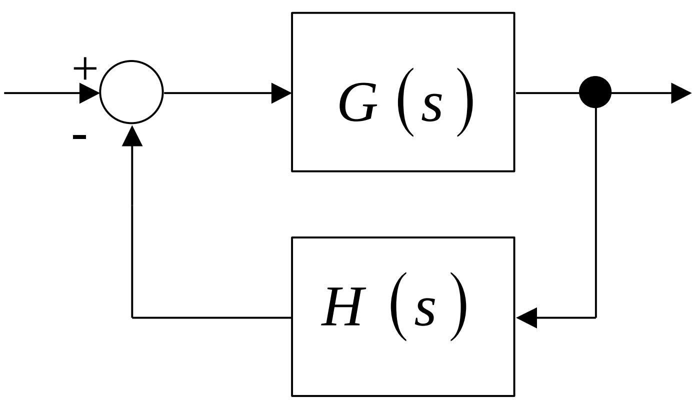
Criterio de Nyquist (3/4)

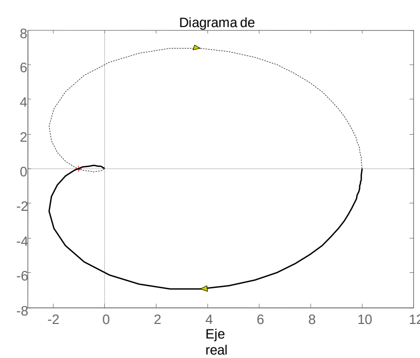
Los pasos a seguir para aplicar el criterio de estabilidad de Nyquist serán:

1. Determinar el camino de Nyquist $\Gamma(s)$ a partir de la información de la cadena abierta.



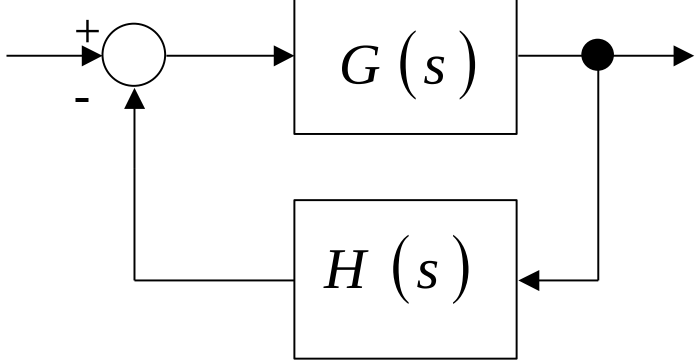
2. Obtener la imagen de la curva, $\Gamma^*(s)=F(\Gamma(s))$, al desplazar $F(s)$ por el camino de Nyquist, $\Gamma(s)$, en un cierto sentido. Por ejemplo, en sentido horario, SMR. Pero podría haberse elegido en sentido contrario, SCMR.

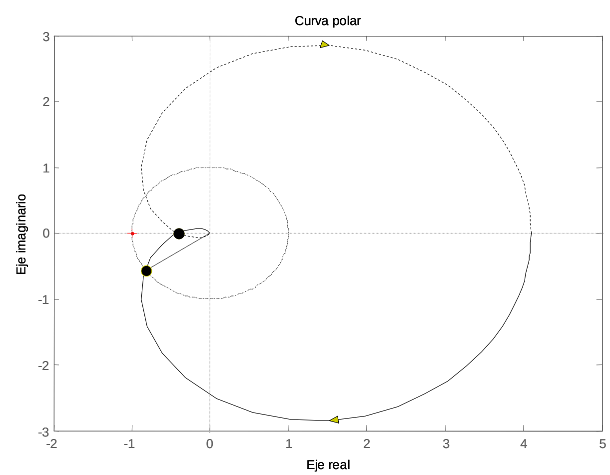




Criterio de Nyquist (4/4)

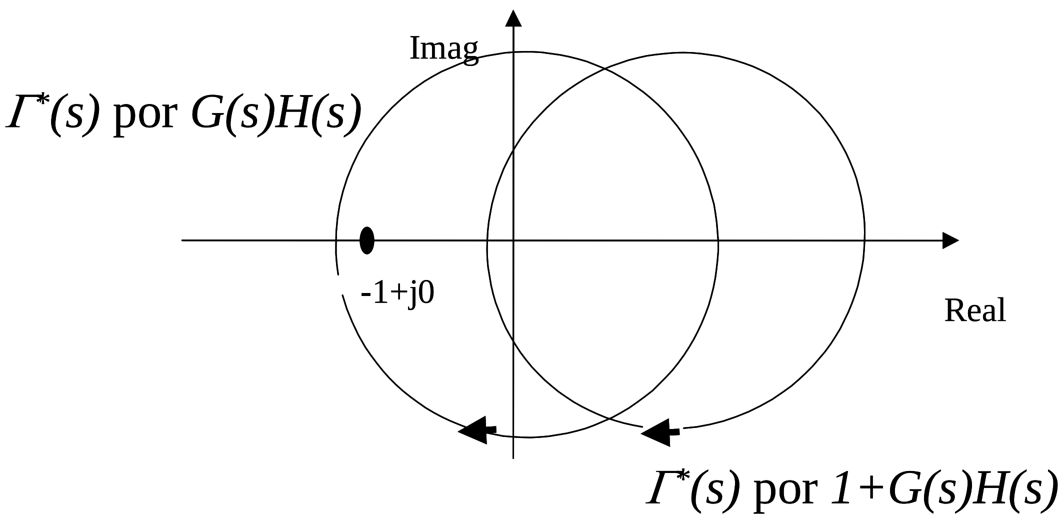
1. Determinar el camino de Nyquist *Γ(s)*
2. Obtener la imagen de la curva, *Γ*(s)=F(Γ(s))*, al desplazar *F(s)* por el camino de Nyquist, *Γ(s)*, en un cierto sentido. Por ejemplo, en sentido horario, SMR.
3. Contabilizar el número de vueltas, *N*, que la imagen *Γ*(s)* da alrededor del origen, siguiendo el sentido de las manecillas del reloj.
4. El número de polos inestables de la cadena cerrada será *Z=N+P*.





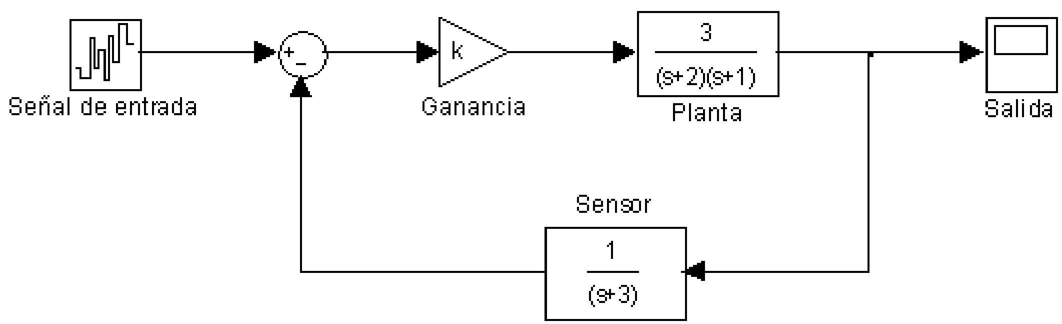
La imagen de la curva Γ y la curva polar

- Para conseguir fácilmente la curva-imagen en vez de emplear la función *1+G(s)H(s)*, se utilizará *G(s)H(s)*.
- La contabilidad del número de vueltas de la curva imagen no será el origen, *0+j0*, se habrá desplazado hacia *–1+j0*.

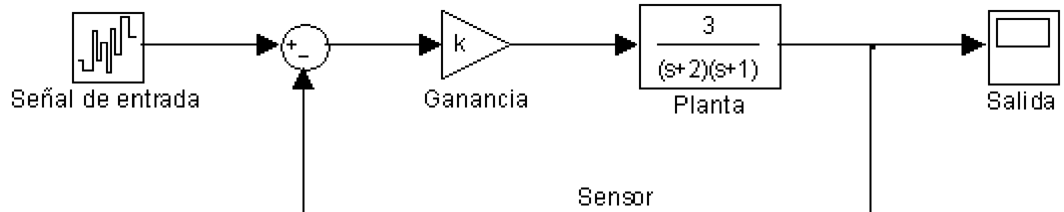


Ejemplo 12.1

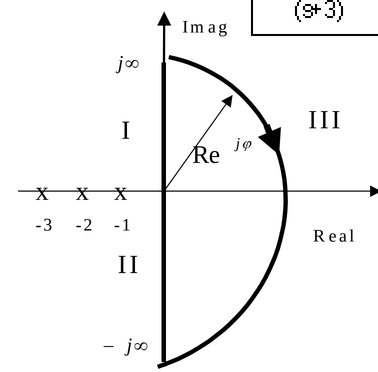
Dado el equipo modelado por la figura adjunta, se pide si para k=1, el sistema es estable o no mediante el criterio de Nyquist. En segundo lugar, se desea saber que valor de k hace que el sistema sea críticamente estable. Empléese la tabla de Routh, el LDR y la curva polar.

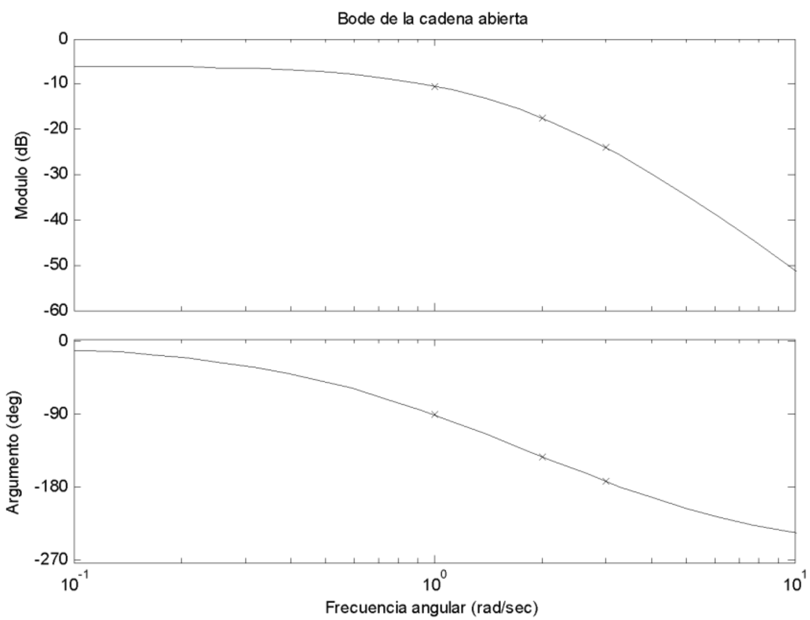


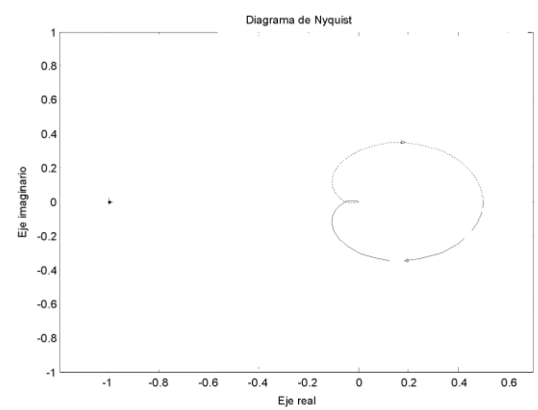
Ejemplo 12.1



$$G(\omega)H(\omega) = \frac{3}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{0.5}{(1+j\omega)\left(1+j\omega\frac{1}{2}\right)\left(1+j\omega\frac{1}{3}\right)}$$

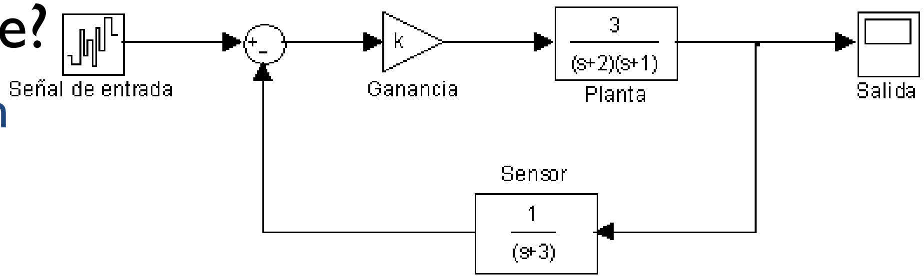




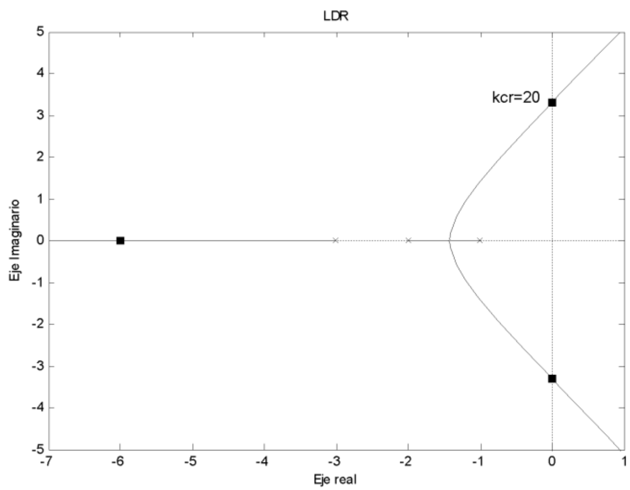


Ejemplo 12.1

- ¿Con qué K dejara de ser estable?



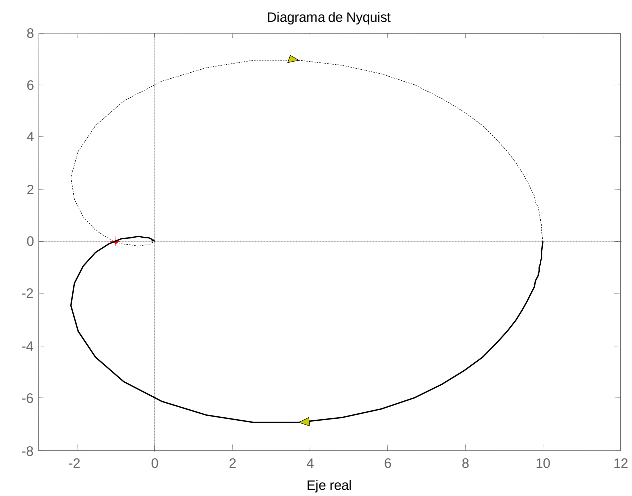
  - Mediante el LDR y la tabla de Routh



$$M(s) = \frac{3k(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)+3k} = \frac{3k(s+3)}{s^3+6s^2+11s+6+3k}$$

$$k_{cr} = \frac{60}{3} = 20$$

  - Con Nyquist



$$G(\omega)H(\omega) = \frac{3K}{(1+j\omega)(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{3K}{(j\omega)^3+6(j\omega)^2+11j\omega+6} =$$

$$= \frac{3k}{-j\omega^3-6\omega^2+11j\omega+6} = \frac{3k}{6(1-\omega^2)+11j\omega-j\omega^3}$$

$$\omega = 0$$

$$11\omega-\omega^3 = 0 \rightarrow \omega(11-\omega^2) = 0$$

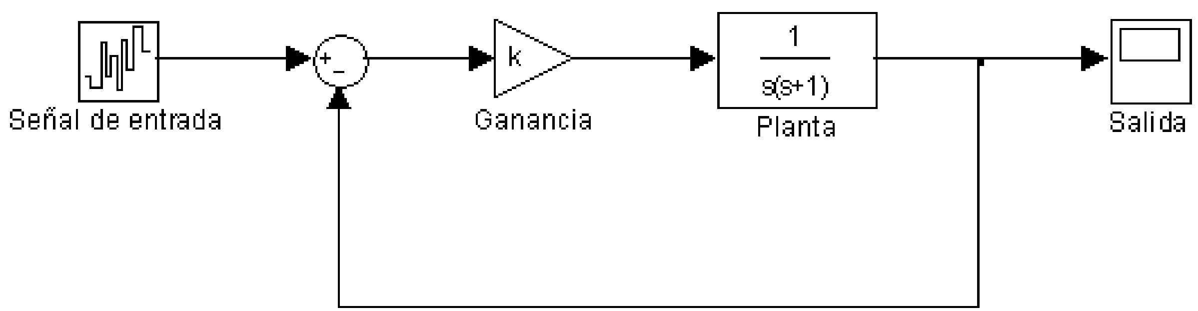
$$\omega_f = \sqrt{11}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$G(\omega_f)H(\omega_f) = \frac{3k_{cr}}{6(1-\omega^2)} = -1$$

$$k_{cr} = \frac{-6(1-11)}{3} = \frac{60}{3} = 20$$

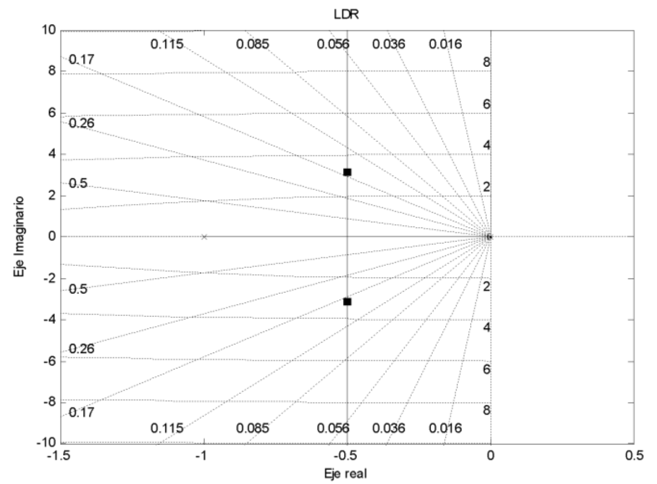
Ejemplo 12.2

¿ Hay algún valor de k > 0 que haga al amplificador realimentado de la figura que sea inestable ? . Utilice técnicas del LDR y el criterio de Nyquist.

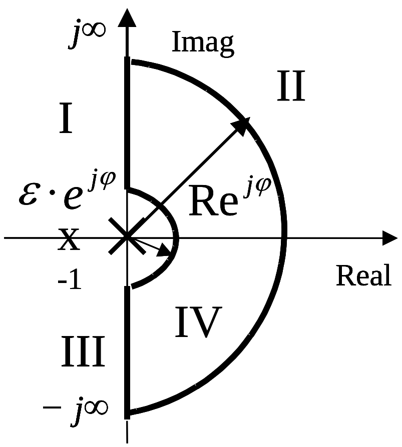


Ejemplo 12.2

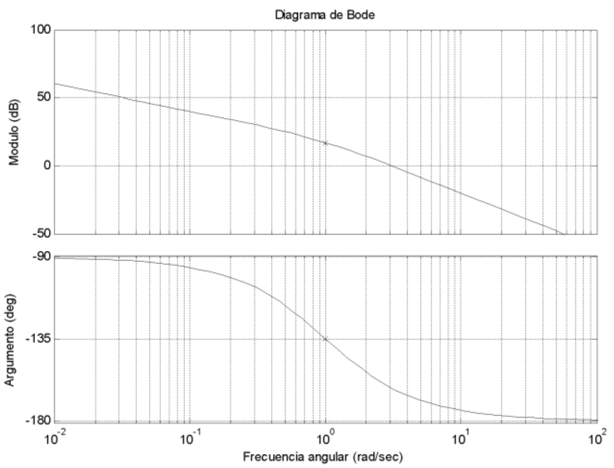
- LDR

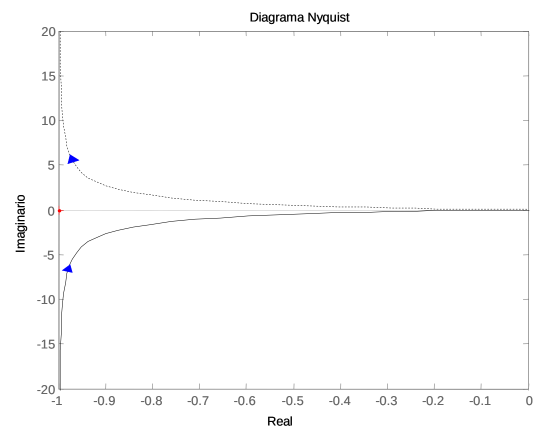


- Nyquist



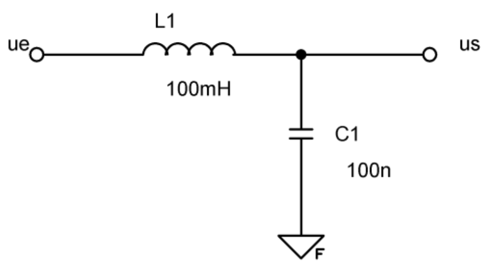
$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(G\left(\varepsilon \cdot e^{j\varphi}\right)H\left(\varepsilon \cdot e^{j\varphi}\right)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot e^{j\varphi}\left(\varepsilon \cdot e^{j\varphi}+1\right)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot e^{j\varphi}}$$

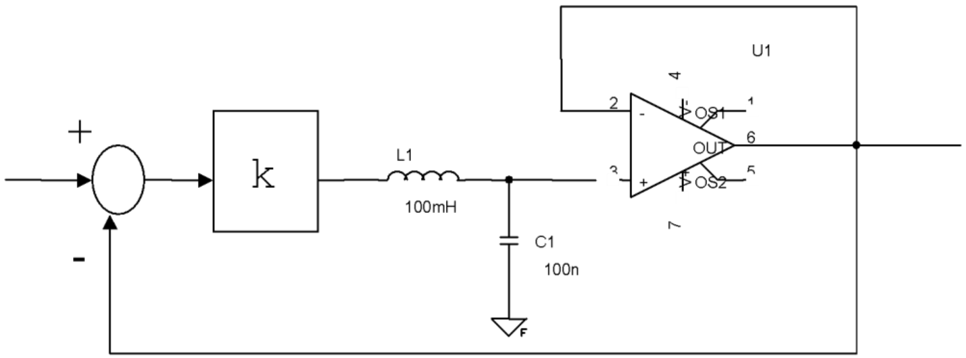




Ejemplo 12.3

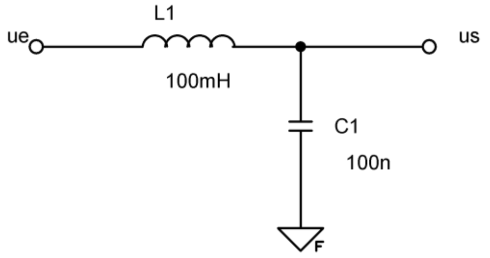
1. Determinar la respuesta en frecuencia de la ganancia de tensión del cuadripolo LC.
2. Dibujar el diagrama de Bode y la curva polar del apartado anterior.
3. Si se realimenta unitariamente el cuadripolo LC según la figura. Dibujar el lugar de raíces.
4. Para $k = 3$, analizar la estabilidad según el criterio de Nyquist. ¿ Cual sería la respuesta ante una entrada en escalón? ¿ Cuanto vale ω_d ?.



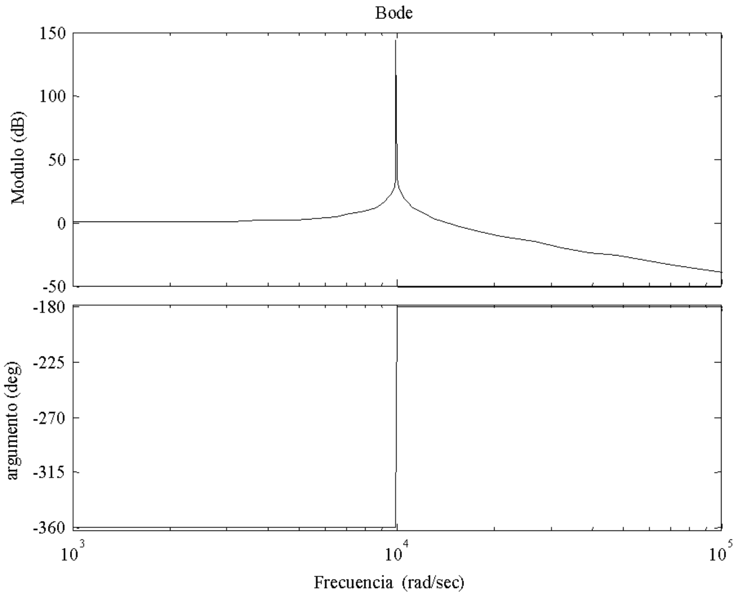


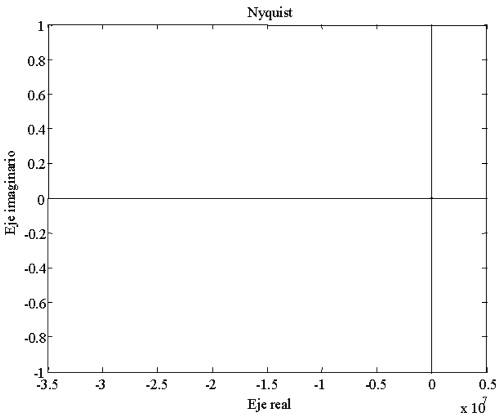
Ejemplo 12.3

1. Determinar la respuesta en frecuencia de la ganancia de tensión del cuadripolo LC.
2. Dibujar el diagrama de Bode y la curva polar del apartado anterior.



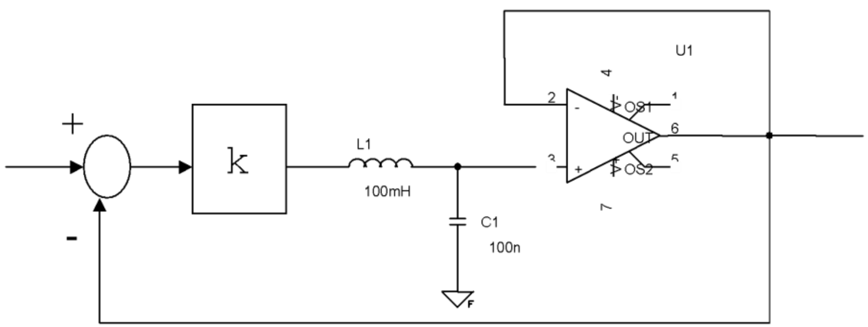
$$A_V(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 LC + 1}$$

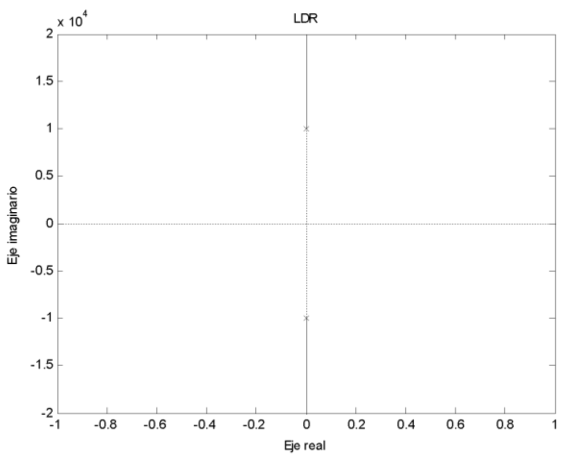




Ejemplo 12.3

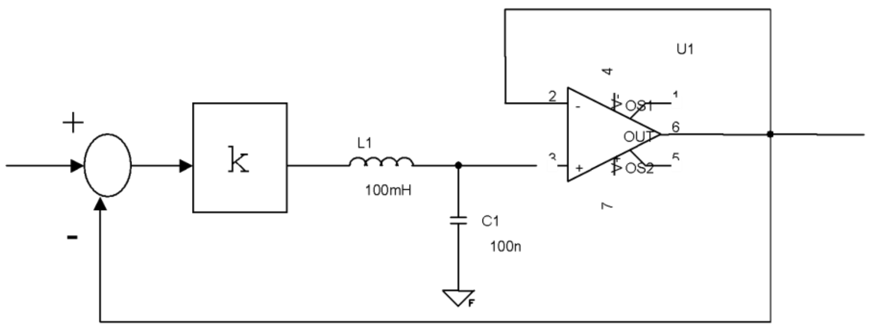
3. Si se realimenta unitariamente el cuadripolo LC según la figura. Dibujar el lugar de raíces.





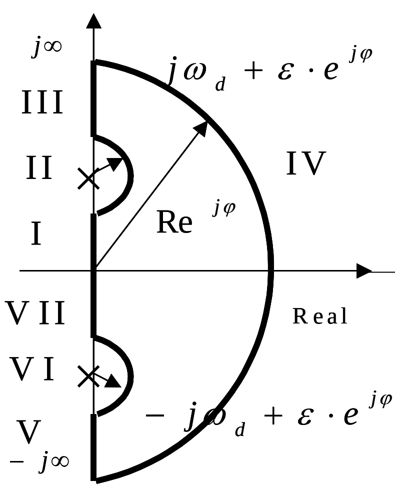
Ejemplo 12.3

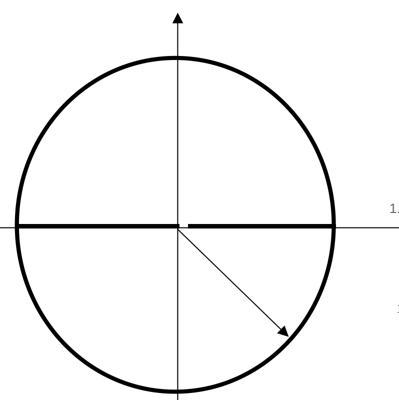
4. Para $k = 3$, analizar la estabilidad según el criterio de Nyquist. ¿ Cual sería la respuesta ante una entrada en escalón? ¿Cuanto vale ω_d ?.

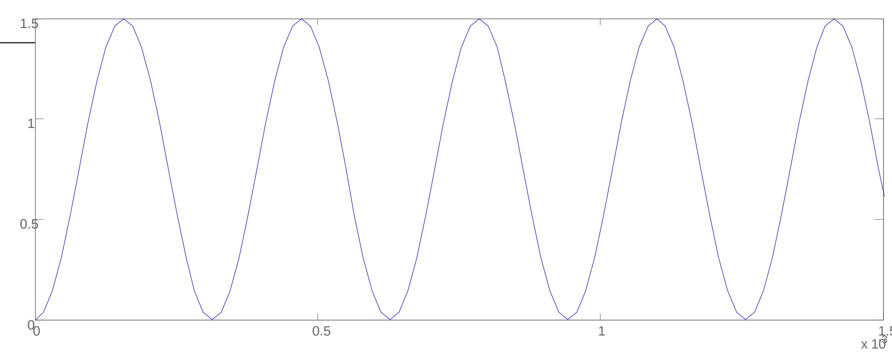


$$M(s) = \frac{k}{s^2 LC + 1 + k} \Rightarrow$$

$$k = 3 \rightarrow \omega_d = 20.000 \ [rad/s]$$

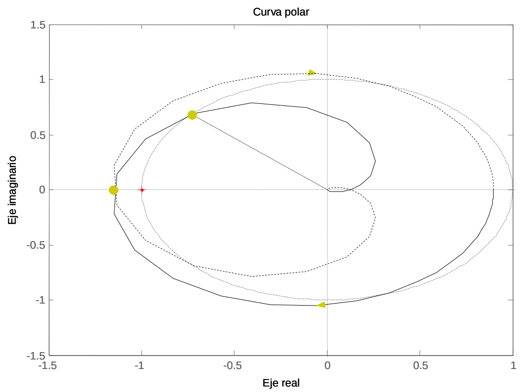


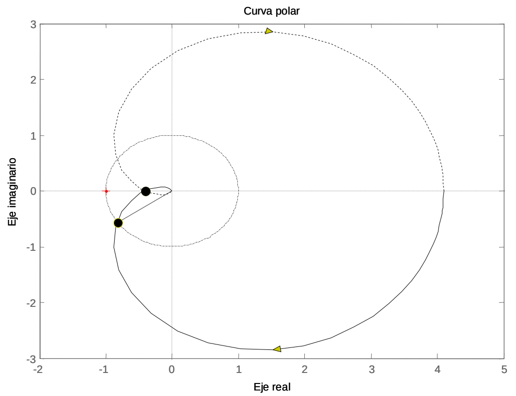




Criterio de Nyquist en sistemas de fase mínima

- *Z = N*
- *Sólo bastará con seguir en SMR la curva polar y observar si el punto –1+j0 queda al lado izquierdo o no. En el caso de que quedase el punto –1+j0 a la izquierda de la curva, el sistema realimentado es estable*





Estabilidad relativa de sistemas de fase mínima (1/3)

- La forma de cuantificar la estabilidad relativa está en las medidas de distancia o separación entre la curva de Nyquist y el punto $-1+j0$.
- Se emplean dos medidas: margen de fase y margen de ganancia.
- Estas medidas utilizan las frecuencia de cruce de ganancia y fase:

$$\boxed{\left|G(\omega_g)H(\omega_g)\right| = 1 <> 0\,[dB]}$$

$$\downarrow$$

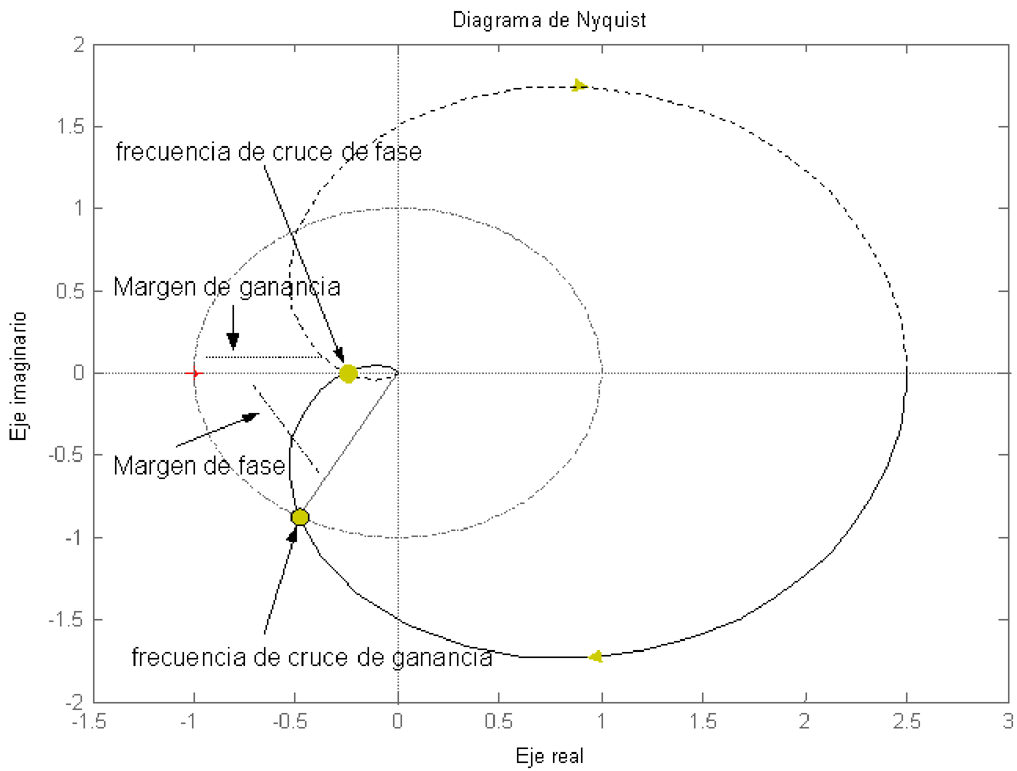
$$\boxed{\gamma = 180 + \arg\left(G(\omega_g)H(\omega_g)\right)}$$

$$\boxed{\arg\left(G(\omega_f)H(\omega_f)\right) = -180^\circ}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{k_g = \frac{1}{\left|G(\omega_f)H(\omega_f)\right|}}$$

Estabilidad relativa de sistemas de fase mínima(2/3)



$$\boxed{\left|G(\omega_g)H(\omega_g)\right| = 1 <> 0\,[dB]}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\gamma = 180 + \arg\left(G(\omega_g)H(\omega_g)\right)}$$

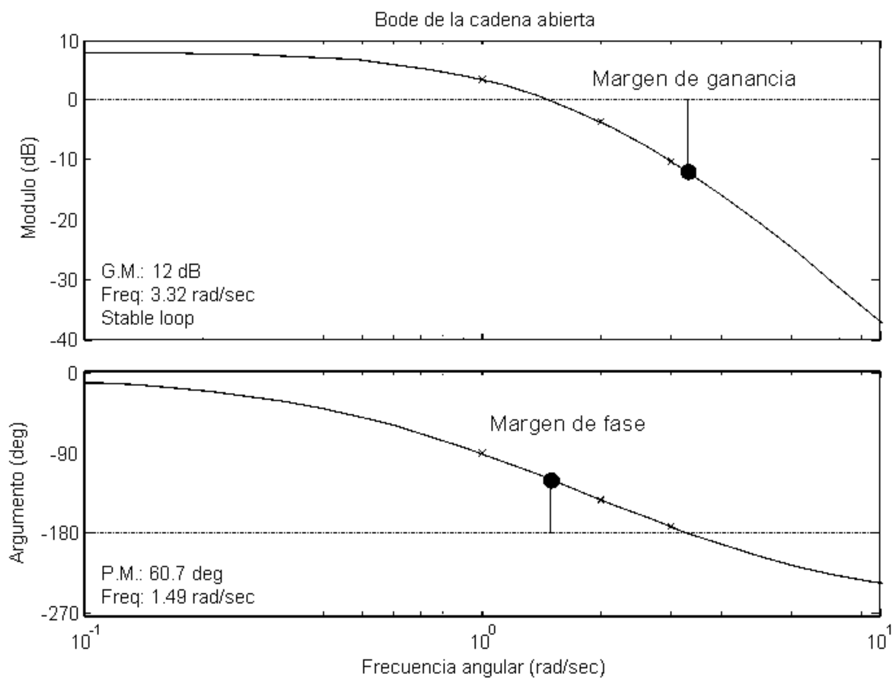
$$\boxed{\arg\left(G(\omega_f)H(\omega_f)\right) = -180^\circ}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{k_g = \frac{1}{\left|G(\omega_f)H(\omega_f)\right|}}$$

Estabilidad relativa de sistemas de fase mínima (3/3)

- Los diagramas de Bode son ideales para obtener el margen de fase y de ganancia de sistemas de fase mínima.



$$\left| G(\omega_g) H(\omega_g) \right| = 1 <> 0 [dB]$$

$$\arg\left(G(\omega_f) H(\omega_f)\right) = -180^\circ$$

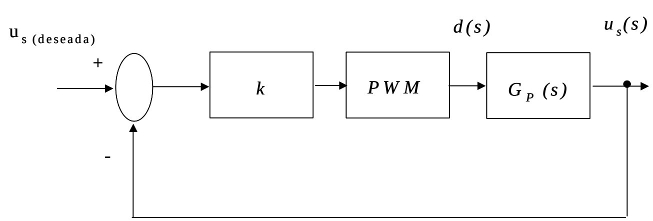
$$\gamma = 180 + \arg\left(G(\omega_g) H(\omega_g)\right)$$

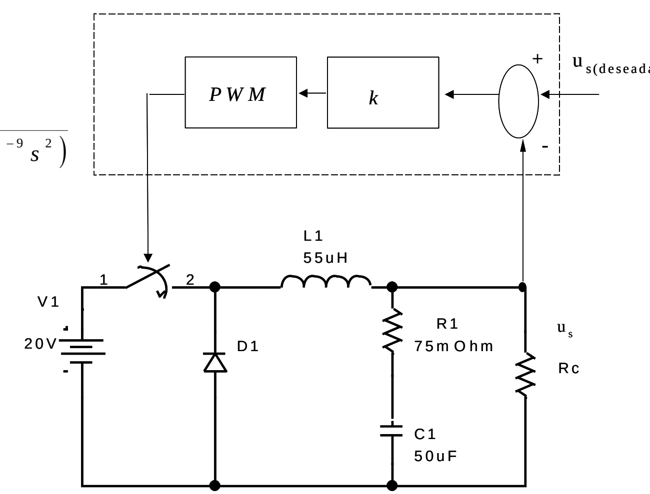
$$k_g = \frac{1}{\left| G(\omega_f) H(\omega_f) \right|}$$

Ejemplo 12.4

Las fuentes conmutadas son equipos de la Electrónica de Potencia que se alimentan de corriente continua a un determinado nivel de tensión y entregan a la carga también corriente continua con otro nivel de tensión (cc/cc). El esquema que se presenta en la figura muestra un reductor, ya que la tensión de entrada, V1, es mayor que la salida. En este caso la entrada es a 20V y la salida es a 5V. El control sobre este sistema depende del ciclo de trabajo del interruptor, al que se le denomina *d (duty cycle)*. Este valor es la relación entre el tiempo de encendido del interruptor y el periodo de trabajo de la fuente conmutada. La regulación del sistema se hace a través de la modulación por ancho del pulso (*Pulse Width Modulation*, PWM), que ataca al interruptor, garantizando que la tensión en la carga sea siempre constante. Aunque el sistema es altamente no lineal, se ha linealizado y se ha determinado su FDT a partir de la potencia nominal que se entrega a la carga, en este caso 50W:

$$G_P(s) = \frac{u_s(s)}{d(s)} = V1 \frac{(1 + R1 \cdot C1 \cdot s)}{\left(1 + \left(R1 \cdot C1 + \frac{L1}{R_C}\right)s + \left(1 + \frac{R1}{R_C}\right)L1 \cdot C1 \cdot s^2\right)} = 20\,\frac{\left(1 + 3.75 \cdot 10^{-6}\, s\right)}{\left(1 + 113.8 \cdot 10^{-6}\, s + 3.16 \cdot 10^{-9}\, s^2\right)}$$



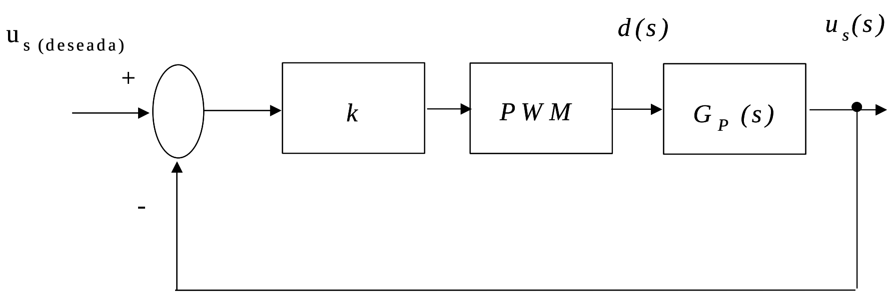


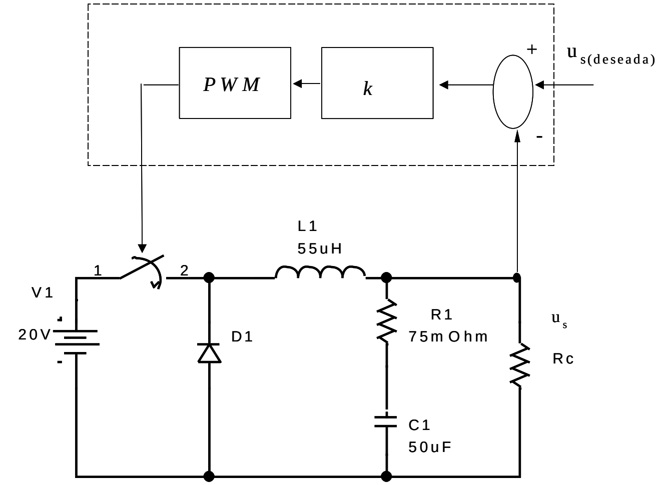
Ejemplo 12.4

- Se pide:

1. Obtener la ganancia estática, *k*, de manera que se cumpla la especificación del 5V±1% de variación en la tensión de salida.
2. Representar el diagrama de Bode de la cadena abierta con la ganancia estática del compensador, $kG_P(j\omega)$.
3. Calcular la frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase.

$$G_P(s) = \frac{u_s(s)}{d(s)} = 20\,\frac{\left(1 + 3.75 \cdot 10^{-6} s\right)}{\left(1 + 113.8 \cdot 10^{-6} s + 3.16 \cdot 10^{-9} s^2\right)}$$

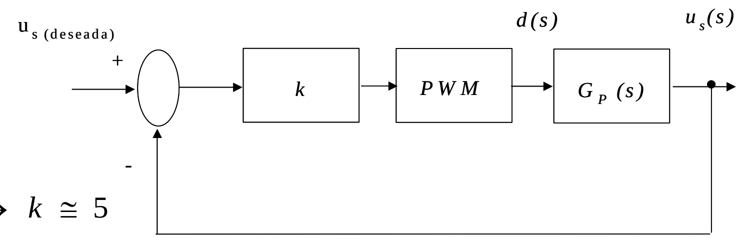




Ejemplo 12.4

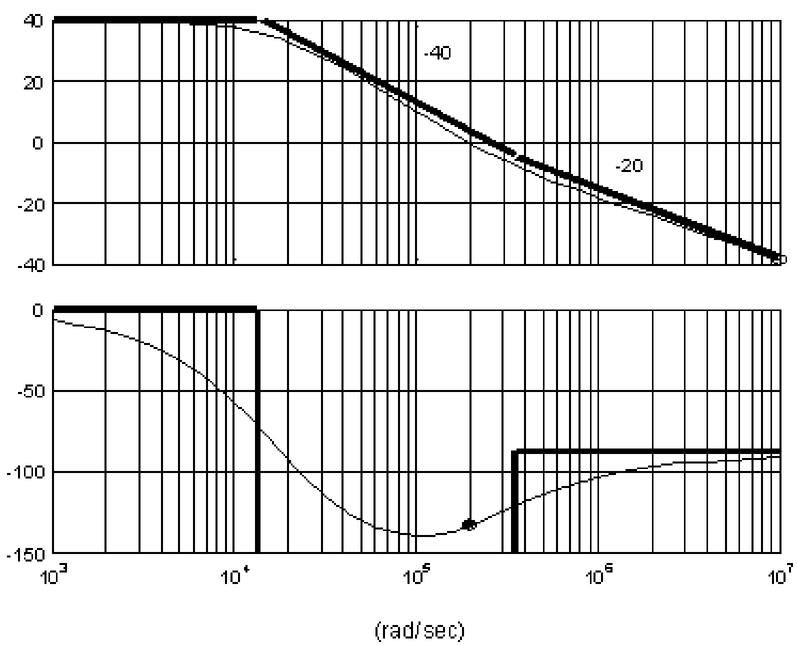
1. Obtener la ganancia estática, *k*, de manera que se cumpla la especificación del 5V±1% de variación en la tensión de salida.

$$G_P(s) = \frac{u_s(s)}{d(s)} = 20\,\frac{\left(1 + 3.75\cdot 10^{-6}s\right)}{\left(1 + 113.8\cdot 10^{-6}s + 3.16\cdot 10^{-9}s^2\right)}$$



$$e_P = \frac{1}{1 + k_P} = 0.01 \rightarrow k_p \cong 100 \qquad k_p = \lim_{s\to 0}\left(k\cdot G_P(s)\right) = k\cdot V1 \rightarrow k \cong 5$$

2. Representar el diagrama de Bode de la cadena abierta con la ganancia estática del compensador, *kGP(j*ω*)*.

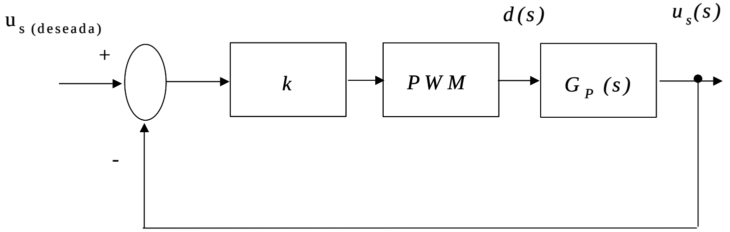


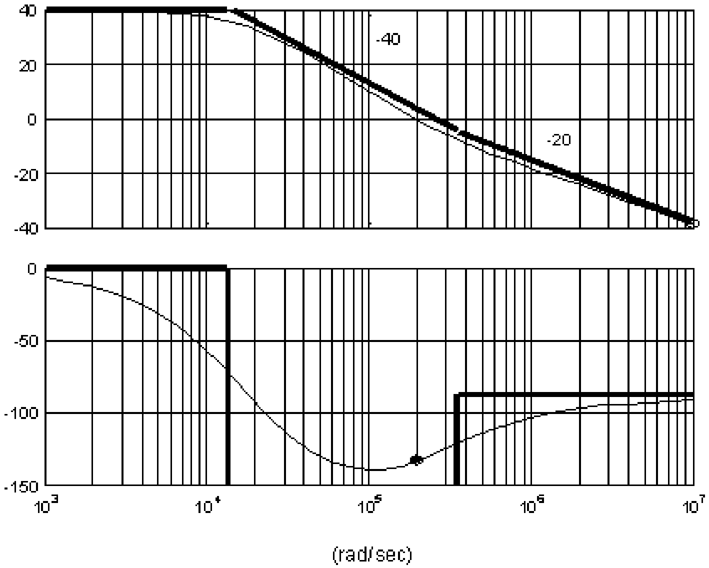
266.666 [rad/s] y por un polo de segundo orden, cuya frecuencia natural, $\omega_{n,p}$,es de 17.789 [rad/s] y un factor de amortiguamiento, ξ, de alrededor de 1.

Ejemplo 12.4

3. Calcular la frecuencia de cruce y el margen de fase.

$$G_P(s)=\frac{u_s(s)}{d(s)}=20\frac{\left(1+3.75\cdot 10^{-6}s\right)}{\left(1+113.8\cdot 10^{-6}s+3.16\cdot 10^{-9}s^2\right)}$$





$$1=\frac{5\cdot 20\sqrt{1+\left(3.75\cdot 10^{-6}\omega_g\right)^2}}{\sqrt{\left(1-3.16\cdot 10^{-9}\omega_g^2\right)^2+\left(113.8\cdot 10^{-6}\omega_g\right)^2}}\rightarrow 9.985\cdot 10^{-18}\omega_g^4-1.4695\cdot 10^{-7}\omega_g^2-9999=0$$

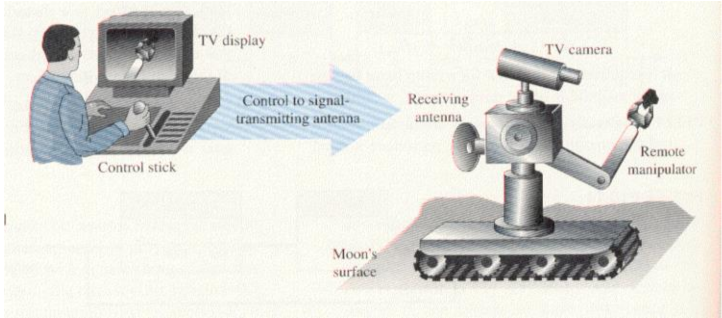
la frecuencia de cruce es de 199.620[rad/s]

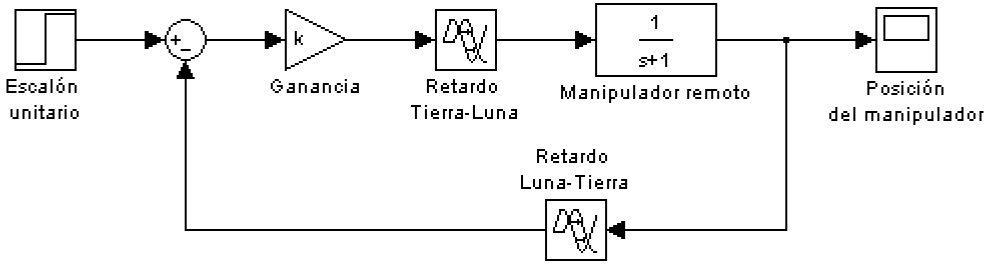
$$\gamma=180+\arg\left(kG_P\left(j\omega_g\right)\right)=180+arctg\left(3.75\cdot 10^{-6}\omega_g\right)-arctg\left(\frac{113.8\cdot 10^{-6}\omega_g}{1-3.16\cdot 10^{-9}\omega_g^2}\right)=47.12^{\circ}$$

Problema 3

Para la colonización de la luna, la Agencia Europea del Espacio (ESA), trabaja en la teleoperación de robots. Suponiendo que el tiempo de retraso en la transmisión de una señal de comunicación, entre la Tierra y la Luna, es de 1.28 seg. Se pide:

1. Diagrama de Bode y curva polar de la cadena abierta para un valor de *k* igual a 1.2.
2. Determinar la ganancia *k* de forma que el sistema tenga un margen de fase de aproximadamente de 50°.





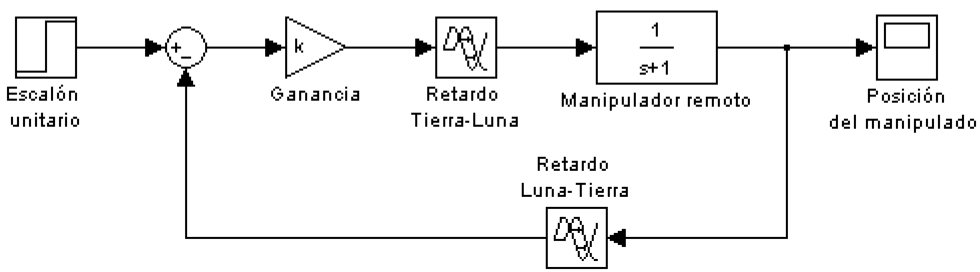
Problema 3

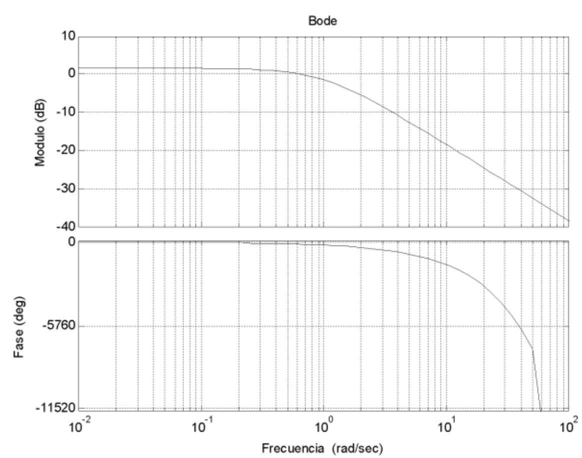
1. Diagrama de Bode y curva polar de la cadena abierta para un valor de k a 1.2.

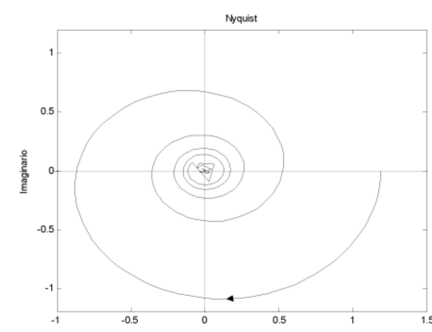
$$G(s)H(s) = 1.2e^{-2.56s}\frac{1}{s+1}$$

$$k = 1.2 <> 1.6dB$$

$$\varphi(1)=-1\cdot 2.56=-2.56\text{rad}=-147^{o}$$

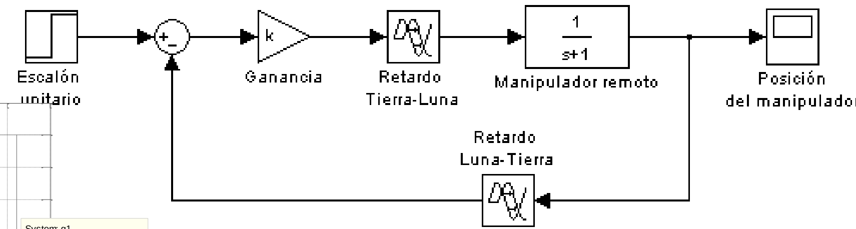


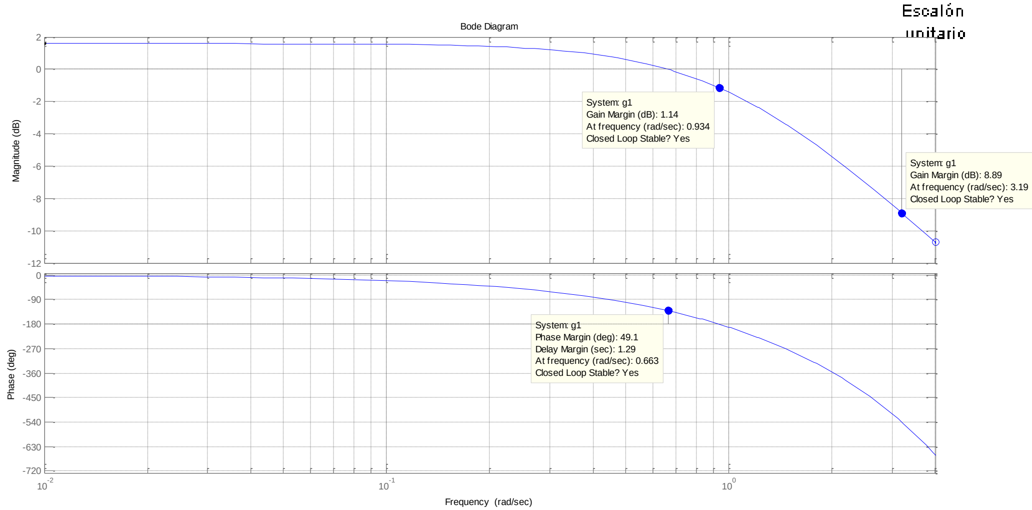




Problema 3

2. Determinar la ganancia *k* de forma que el sistema tenga un margen de fase de aproximadamente de 50°.



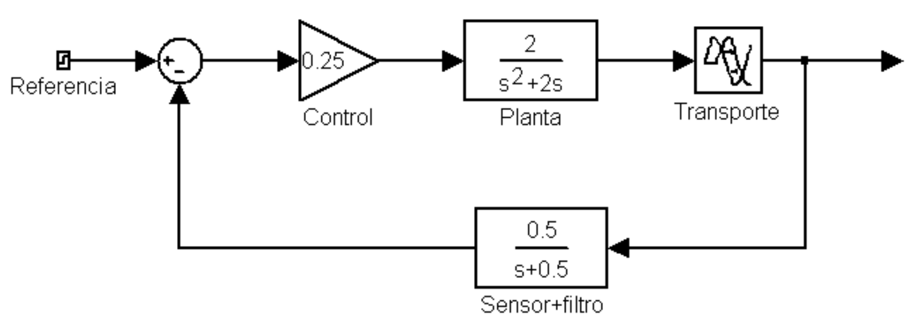


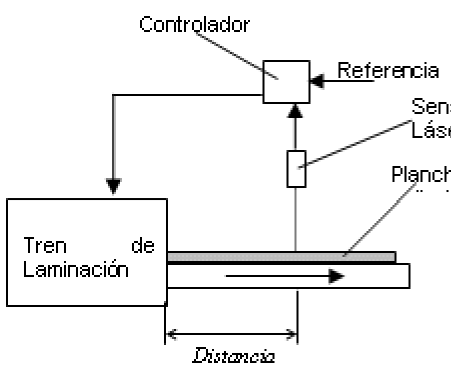
$$\gamma = 50 = 180 - \left(arctg\left(\omega_g\right) + 2T_d\omega_g\right)\frac{180}{\pi} \Rightarrow \omega_g + 2T_d\omega_g \approx \frac{130^{\circ}}{180^{\circ}}\pi \Rightarrow \omega_g \approx 0.63\,[rad/s]$$

$$\frac{k}{\sqrt{1+0.63^2}} = 1 \Rightarrow k = 1.18$$

Problema 4

- Se desea analizar el sistema de control de espesor de un tren de laminación. La acción de control se realiza por medio de la regulación de la fuerza que ejercen los rodillos sobre la plancha de acero saliente, de forma que la acción de control regule el espesor del acero. Para poder realimentar el espesor logrado se dispone de un sensor laser que aguas abajo obtiene una señal proporcional al grosor. El valor medido es necesario filtrarlo para eliminar la componente de alta frecuencia debido a las imperfecciones superficiales de la lámina saliente. Finalmente, la señal obtenida se compara con una referencia y el error se utiliza para actuar según una acción proporcional (***K=0.25***) sobre el tren de laminado. En las figuras siguientes se muestran el esquema del sistema y el diagrama de bloques correspondiente.
- Puesto que el sensor está situado a cierta distancia *d* respecto de la salida del tren de laminación, existe un retardo debido al transporte que dependerá de la distancia, puesto que la velocidad de salida de la plancha se considerará constante e igual a **1 metro por segundo** en las condiciones nominales.





Problema 4

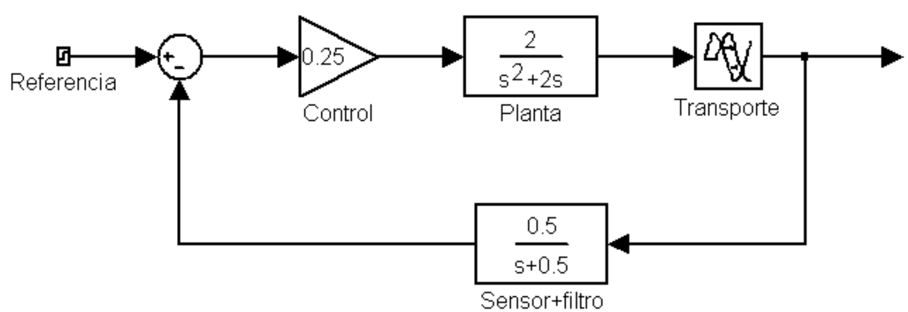
- **Se pide**:

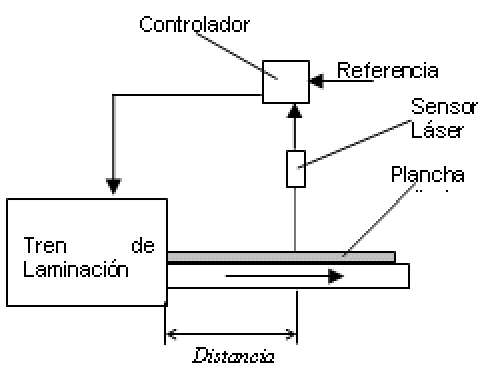
1.- Calcular los errores de posición, velocidad y aceleración del sistema.

2.- Pintar la respuesta en frecuencia del sistema en cadena abierta considerando la distancia de medida nula y por tanto que no hay retardo en la medida. Trazar el diagrama de bode asintótico y el diagrama polar.

3.- Obtener el Margen de fase y el Margen de ganancia para las condiciones anteriores. Demostrar que la frecuencia de cruce de ganancia es de ***0.035 Hz*** y que la frecuencia de cruce de fase es de ***0.16 Hz***.

4.- Para evitar oscilaciones excesivas se quiere asegurar que el margen de fase no supere los 50º. ¿Cuál es la distancia máxima admisible a la que puede situarse el sensor?. ¿A qué distancia se vuelve inestable el sistema?.





Problema 4

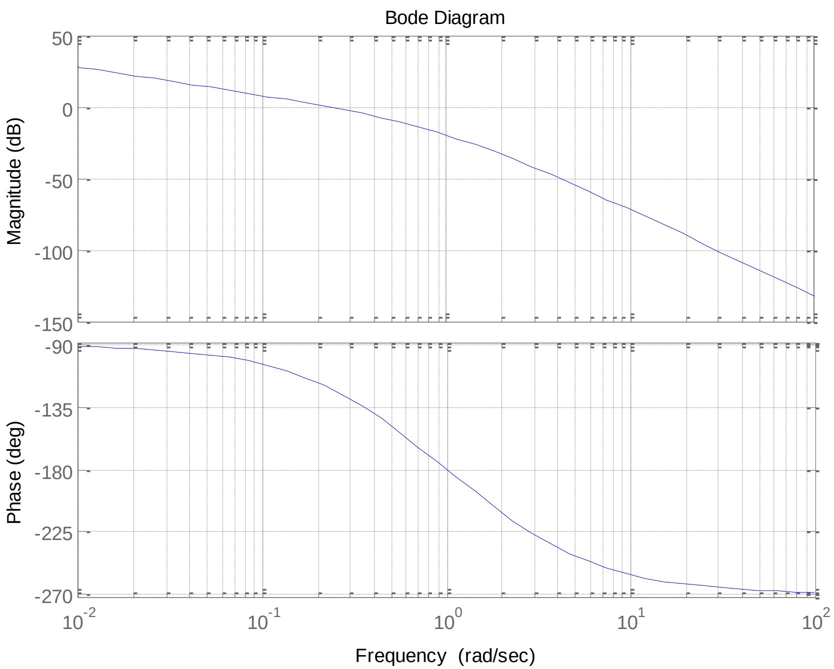
- **Se pide**:

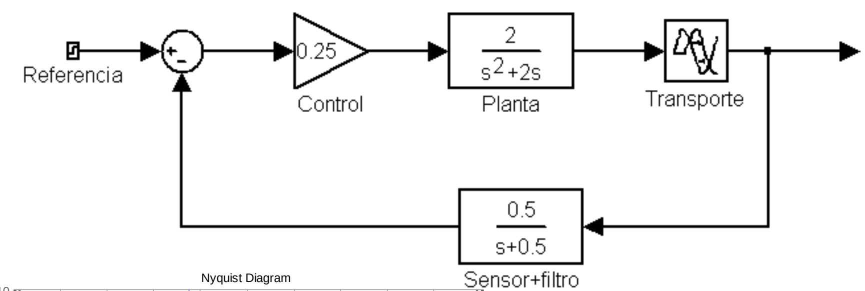
1.- Calcular los errores de posición, velocidad y aceleración del sistema.

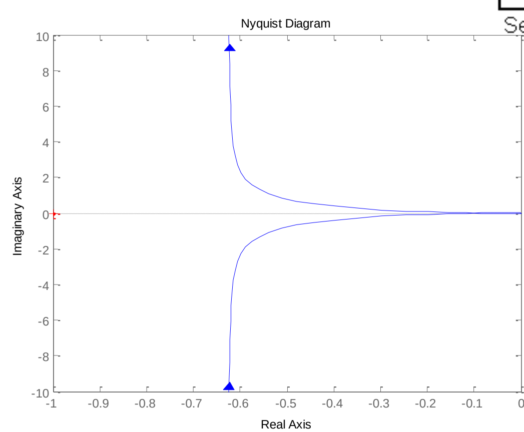
2.- Pintar la respuesta en frecuencia del sistema en cadena abierta considerando la distancia de medida nula y por tanto que no hay retardo en la medida. Trazar el diagrama de bode asintótico y el diagrama polar.

$$e_{rp} = \lim_{s\to 0} s\frac{X(s)}{K_H}\left[1 - K_H M(s)\right] = \lim_{s\to 0} sX(s)\left[\frac{s(s^2+2.5s+0.5)}{s^3+2.5s^2+s+0.25}\right]$$

$$e_p = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left[\frac{s(s^2+2.5s+0.5)}{s^3+2.5s^2+s+0.25}\right] = 0 \qquad e_v = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\left[\frac{s(s^2+2.5s+0.5)}{s^3+2.5s^2+s+0.25}\right] = 2 \qquad e_a = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^3}\left[\frac{s(s^2+2.5s+0.5)}{s^3+2.5s^2+s+0.25}\right] = \infty$$







Problema 4

- **Se pide**:

3.- Obtener el Margen de fase y el Margen de ganancia para las condiciones anteriores. Demostrar que la frecuencia de cruce de ganancia es de ***0.035 Hz*** y que la frecuencia de cruce de fase es de ***0.16 Hz***.

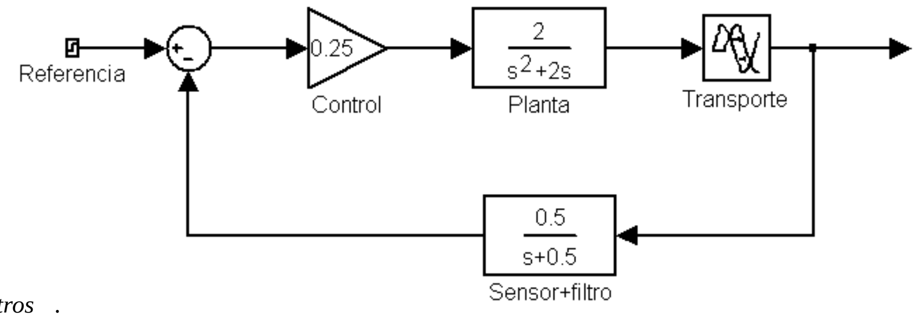
4.- Para evitar oscilaciones excesivas se quiere asegurar que el margen de fase no supere los 50º. ¿Cuál es la distancia máxima admisible a la que puede situarse el sensor?. ¿A qué distancia se vuelve inestable el sistema?.

$$\left|G(j\omega_g)H(j\omega_g)\right| = 1 = \frac{|0.25|}{|j0.22|\,|0.22j+0.5|\,|0.22j+2|}$$

$$\omega_g = 0.035\ Hz = 0.22\ \tfrac{rad}{seg}$$

$$\angle G(j\omega_f)H(j\omega_f) = -180 = -90 - atn\tfrac{1}{0.5} - atn\tfrac{1}{2}$$

$$\omega_f = 0.16\ Hz = 1\ \tfrac{rad}{seg}$$



$$\gamma = 180 + \angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) = 60^{\circ}$$

$$K_g = \frac{1}{\left|G(j\omega_f)H(j\omega_f)\right|} = 10 = 20\ dB$$

$$-T\omega_g \propto -10^{\circ} \Rightarrow \frac{10\pi}{180} \geq 0.22T \Rightarrow T < 0.79\ seg. \Rightarrow distancia = 0.79\ metros.$$

$$-T\omega_g \propto -60^{\circ} \Rightarrow \frac{60\pi}{180} \geq 0.22T \Rightarrow T < 4.75\ seg. \Rightarrow distancia = 4.75\ metros.$$

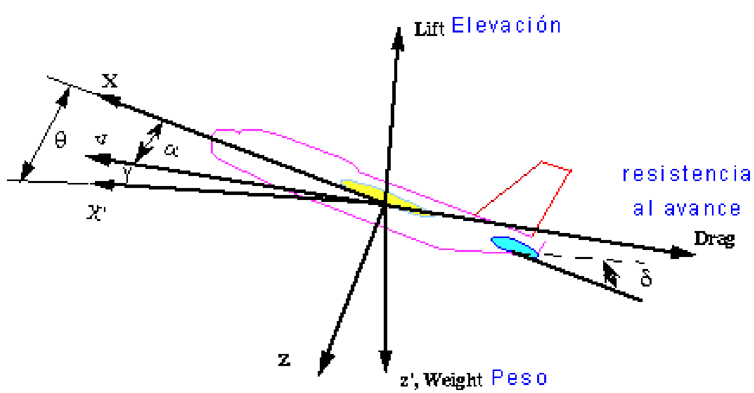
Problema 6

El esquema de la figura muestra el sistema elevación de un avión. Bajo ciertas simplificaciones, la FDT entre el timón de cola y la elevación de la aeronave es:

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{1.151s + 0.1775}{s^3 + 0.739s^2 + 0.921s}$$

Se pide:

1. Dibujar el diagrama de bode.
2. Representar la curva polar.
3. Si se realimenta unitariamente, calcular las frecuencias de cruce de ganancia y fase, junto a los márgenes de fase y ganancia.

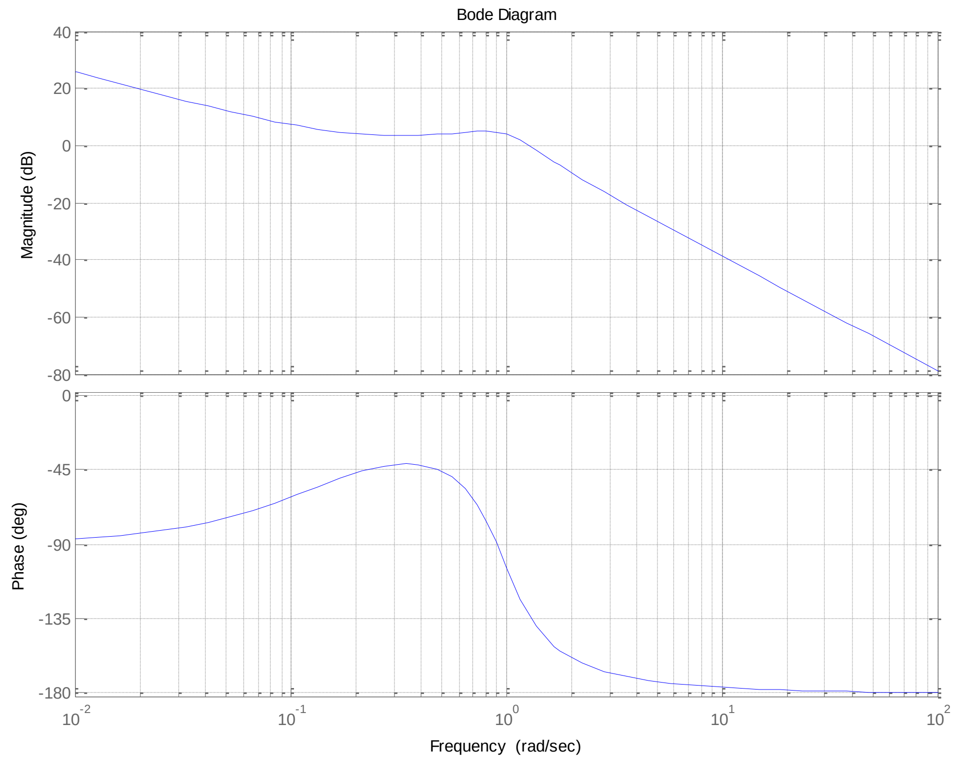


Bode

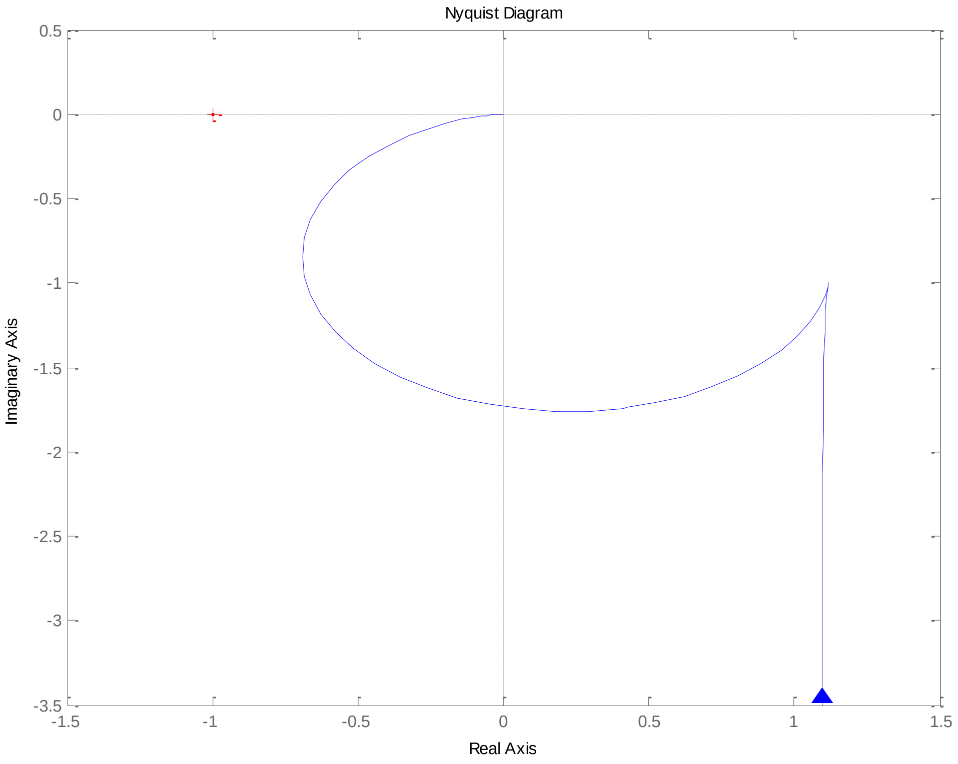
- Normalización de la FDT

$$\frac{\theta(\omega)}{\delta(\omega)} = \frac{1.151\omega + 0.1775}{\omega^3 + 0.739\omega^2 + 0.921\omega} = \frac{0.1775\left(1 + j\omega \cdot 6.4845\right)}{j\omega \cdot 0.921\left(\left(\frac{j\omega}{0.9597}\right)^2 + 2 \cdot 0.385\left(\frac{j\omega}{0.9597}\right) + 1\right)}$$

- La frecuencia del cero está a 0.154 [rad/s] y la frecuencia natural del polo esta a 0.96 [rad/s].



Curva polar


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Estabilidad

- Frecuencia de cruce de ganancia y margen de fase

$$\frac{0.1775\sqrt{1+\left(\omega_g\cdot 6.4845\right)^2}}{\omega_g\cdot 0.921\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_g}{0.9597}\right)^2\right)^2+\left(2\cdot 0.385\left(\frac{\omega_g}{0.9597}\right)\right)^2}}=1 \quad\rightarrow\quad \omega_g=1.27[rad/s]$$

$$\gamma=180+\arg\left(G\left(\omega_g\right)\right)=180-90+arctg\left(6.48\cdot\omega_g\right)-arctg\left(\frac{0.8\cdot\omega_g}{1-1.08\cdot\omega_g^2}\right)=46.9^{\circ}$$